Esercizi svolti e assegnati su integrali doppi e tripli

Esercizio 1. Calcolare

$$I = \iint_R \frac{2xy}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}\, dxdy$$

ove

$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq x^2+y^2 \leq 2x\Big\}$$

Svolgimento. Passo 0: per disegnare R, studiamo

$$\mathcal{C}_1 : \ x^2+y^2-x=0, \quad \mathcal{C}_2 : \ x^2+y^2-2x=0$$

"Completando il quadrato", si osserva che

$$x^2+y^2-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

cioè $\mathcal{C}_1$ è la circonferenza di centro $(\frac{1}{2},0)$ e raggio $\frac{1}{2}$ analogamente

$$\mathcal{C}_2 : \ (x-1)^2+y^2=1$$

la circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1. Quindi R è la semicorona circolare compresa fra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ nel primo quadrante.

Passo 1: cambiamento di variabili l'espressione analitica di f suggerisce l'uso delle coordinate polari. Vediamo come si trasforma R:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta), \\ y = \rho\sin(\vartheta), \\ \rho = x^2+y^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x \leq x^2+y^2 \leq 2x \quad \Leftrightarrow \quad \rho\cos(\vartheta) \leq \rho^2 \leq 2\rho\cos(\vartheta), \\ x \geq 0, y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big] \end{cases}$$

Inoltre, ricordando che $\rho \geq 0$,

$$\rho\cos(\vartheta) \leq \rho^2 \leq 2\rho\cos(\vartheta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\vartheta) \leq \rho \leq 2\cos(\vartheta).$$

Allora $R \to \tilde{R}$, con

$$\tilde{R} = \Big\{(\rho,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \ : \ \vartheta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \cos(\vartheta) \leq \rho \leq 2\cos(\vartheta)\Big\}$$

è un "dominio normale in ϑ".

Passo 2: calcolo l'integrale

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{2xy}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}\, dxdy &= \iint_{\tilde{R}} \frac{2\rho^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)}{\rho^2(1+\rho^2)} \rho d\rho d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{\cos(\vartheta)}^{\sin(\vartheta)} \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) d\rho d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \left[\ln(1+\rho^2)\right]_{\cos(\vartheta)}^{\sin(\vartheta)} \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big[\ln(1+4\cos^2(\vartheta)) - \ln(1+\cos^2(\vartheta))\Big] d\vartheta = I_4 - I_1 \end{aligned}$$

ove per $\alpha > 0$ poniamo

$$I_\alpha = \int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\ln(1+\alpha\cos^2(\vartheta))d\vartheta$$

Effettuando il cambiamento di variabili $z = \cos^2(\vartheta)$ si ottiene

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+\alpha z)dz$$

che calcoliamo integrando per parti. Quindi

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\ln(1+\alpha) + \frac{1}{2\alpha}\ln(1+\alpha) - \frac{1}{2}$$

e allora

$$\begin{aligned}&\iint_R \frac{2xy}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}\,dxdy\\ &= \frac{5}{8}\ln(5) - \ln(2)\end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare

$$I = \iiint_T z\exp(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\text{con}\ \ T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 \le z \le 1\right\}.$$

Svolgimento. Il dominio di integrazione T è dato dalle due condizioni

$$x^2+y^2 \le z, \quad 0 \le z \le 1$$

che individuano la regione compresa fra il paraboloide $z = x^2+y^2$ (che è una superficie di rotazione) e il piano $z = 1$. Sia la geometria del dominio T (nella cui espressione analitica compare il termine x^2+y^2) sia l'espressione di f (che contiene il termine x^2+y^2) suggeriscono l'uso delle coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta), \\ y = \rho\sin(\vartheta), \\ z = z \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z.$$

In coordinate cilindriche, il dominio T diventa

$$\tilde{T}: \quad z\in[0,1], \quad \vartheta\in[0,2\pi], \quad (\rho^2 \le z \Leftrightarrow 0\le\rho\le\sqrt{z}).$$

Quindi, integrando per fili in ρ si ha

$$\begin{aligned} I = \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \left(\int_0^{\sqrt{z}} z\exp(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} z\left[\frac{1}{2}\exp(\rho^2)\right]_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\vartheta\right)\left(\int_0^1 z(e^z-1)\,\mathrm{d}z\right) = \ldots = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare

$$I = \iiint_T 2xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

ove T è il solido contenuto nel primo ottante e limitato dalle superficie $y = x^2+z^2$ e $y = 1$.

Svolgimento. Quindi T è dato da

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1, z \geq 0,\ x^2 + z^2 \leq y\right\}.$$

È naturale interpretare T come dominio "normale rispetto all'asse y" e integrare per strati rispetto alle variabili (x, z): infatti,

$$T \ : \ \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ (x, z) \in D_y = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + z^2 \leq y\right\}. \end{cases}$$

Applicando la corrispondente formula di riduzione per strati, si ha

$$I = \int_0^1 \left(\iint_{D_y} 2xz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y.$$

Notiamo che per ogni $y \in [0, 1]$ lo strato D_y è un disco di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{y}$: è naturale calcolare l'integrale esteso a D_y passando alle coordinate polari

$$(x, z) \rightsquigarrow (\rho, \vartheta) : \begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \end{cases} \quad \Rightarrow \ \mathrm{d}x\mathrm{d}z \to \rho \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta$$

e

$$D_y \to 0 \leq \rho \leq \sqrt{y},\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_{D_y} 2xz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \iint_{[0,\sqrt{y}]\times[0,\pi/2]} 2\rho^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\rho \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta &= \left(\int_0^{\sqrt{y}} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right) \\ &= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{\sqrt{y}} \left[-\frac{1}{2}\cos(2\vartheta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

da cui

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{12}. \tag{1}$$

Procedimento alternativo. Interpretare T come dominio normale rispetto al piano xy e integrare per fili in z, cioè osservare che

$$x \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + z^2 \leq y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq z \leq \sqrt{y - x^2},\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}$$

e quindi

$$T \ : \ \begin{cases} (x, y) \in D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{y - x^2}. \end{cases}$$

Quindi integrando per fili in z si ha

$$I = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{y-x^2}} 2xz \,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = \iint_D \left(xy - x^3\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tratto l'integrale doppio su D osservando che D è un dominio normale in y e applico la relativa formula di riduzione. **Esercizio:** ritrovare il risultato (1) applicando con questo procedimento alternativo.

Esercizio 4. Siano a, b, $c > 0$ e si consideri il volume T racchiuso dall'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Calcolare

$$I = \iiint_T \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}$$

è simmetrico rispetto all'asse x, all'asse y, e all'asse z. Inoltre la funzione integranda è chiaramente pari in x, in y e in z (visto che non dipende da z). Allora è facile vedere che

$$I = 8 \iiint_{T_+} \left(x^2 - y^2\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\text{con } \; T_+ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, \; x \ge 0, \, y \ge 0, \, z \ge 0 \right\}.$$

La geometria del dominio di integrazione suggerisce il passaggio alle coordinate sferiche generalizzate

$$\begin{cases} x = a\rho \cos(\vartheta) \sin(\phi), \\ y = b\rho \sin(\vartheta) \sin(\phi), \\ z = c\rho \cos(\phi), \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;\to\; abc\rho^2 \sin(\phi) \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\phi$$

e il dominio T_+ diventa un parallelepipedo

$$T_+ \;\to\; [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Quindi

$$\begin{aligned}
I &= 8 \iiint_{[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left(a^2\rho^2 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\phi) + b^2\rho^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\phi)\right) \, abc\rho^2 \sin(\phi) \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\phi \\
&= 8abc \iiint_{[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left(a^2\rho^4 \cos^2(\vartheta) \sin^3(\phi) + b^2\rho^4 \sin^2(\vartheta) \sin^3(\phi)\right) \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\phi \\
&= 8abc \left(\int_0^1 \rho^4 \, \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3(\phi) \, \mathrm{d}\phi \right) \left(a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta + b^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \\
&= \dots \\
&= 8abc \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(a^2 \frac{\pi}{4} + b^2 \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{4}{15} \pi abc \left(a^2 + b^2\right).
\end{aligned}$$

Esercizio assegnato. Calcolare

$$I = \iiint_T z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

con T il volume racchiuso dall'ellissoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$.

Risposta:

$$I = 200\pi.$$

Esercizio 5. Calcolare

$$I = \iiint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

con

$$T = \left\{ (x, y, z) \, \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \; x^2 + y^2 \le z^2, \; z \ge 0 \right\}.$$

Svolgimento. La geometria del dominio T (intersezione di una sfera con un cono, nel semispazio $\{z \geq 0\}$), così come l'espressione analitica della funzione integranda, suggeriscono il passaggio alle coordinate cilindriche. A questo scopo, osserviamo che

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq \min\{z^2, 1 - z^2\}\right).$$

Quindi passando alle coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta), \\ y = \rho\sin(\vartheta), \\ z = z \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z.$$

il dominio T diventa

$$\tilde{T}: \quad z \in [0,1], \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad 0 \leq \rho \leq a(z) := \sqrt{\min\{z^2, 1 - z^2\}} = \min\{z, \sqrt{1 - z}\}.$$

È facile vedere che

$$a(z) = \begin{cases} z & \text{se } 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{1 - z^2} & \text{se } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Allora, interpretando $\tilde{T}$ come "dominio normale" rispetto al piano ϑz e integrando per fili in ρ

$$\begin{aligned} I = \iiint_{\tilde{T}} \frac{1}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \left(\int_0^{a(z)} 1\,\mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta\right)\left(\int_0^1 a(z)\,\mathrm{d}z\right) \\ &= 2\pi\left(\int_0^{\sqrt{2}/2} z\,\mathrm{d}z + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1 - z^2}\,\mathrm{d}z\right). \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabile

$$z = \sin(t)$$

calcolo

$$\int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1 - z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t + \sin(t)\cos(t)}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

D'altra parte

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[z^2\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}.$$

Quindi

$$I = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Esercizio 6. Calcolare il volume V del solido ottenuto ruotando intorno all'asse z la figura piana, contenuta nel piano yz

$$G = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \ :\ \sqrt{z - 1} \leq y \leq \sqrt{4 - z},\ 1 \leq z \leq 2\right\}.$$

Svolgimento. Applico la formula (ottenuta usando le coordinate cilindriche) per il calcolo del volume dei solidi di rotazione

$$V = 2\pi \iint_{\tilde{G}} \rho \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z,$$

con

$$\tilde{G} = \left\{ (\rho, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \, : \, \sqrt{z-1} \leq \rho \leq \sqrt{4-z}, \; 1 \leq z \leq 2 \right\}.$$

Allora, osservando che $\tilde{G}$ è un dominio normale in z,

$$V = 2\pi \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{z-1}}^{\sqrt{4-z}} \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}z = 2\pi \int_1^2 \frac{1}{2} \left(4 - z - (z-1) \right) \mathrm{d}z = \ldots = 2\pi.$$

Esercizio 7. Data una costante $a > 0$, calcolare il volume del solido

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2, \; x^2 + y^2 \leq 2az \right\}$$

Svolgimento. T è l'intersezione fra

- il volume racchiuso dalla superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}a$
- il volume racchiuso dal paraboloide ellittico con base circolare $x^2 + y^2 \leq 2az$

Interpreto T come dominio normale rispetto al piano xy. Graficamente, si vede che

- (x, y) variano nel disco chiuso D, il cui bordo è la proiezione sul piano xy della circonferenza data dalla proiezione dell'intersezione tra la superficie della sfera e il paraboloide. Quindi individuo la circonferenza intersezione fra superficie sferica e paraboloide

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \;\Rightarrow\; z = -3a, \, z = a$$

  $z = -3a$ non accettabile. La circonferenza intersezione è

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 2a(a) = 2a^2, \quad \text{nel piano } z = a,$$

  la cui proiezione sul piano xy è $x^2 + y^2 = 2a^2$. Quindi

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 2a^2 \right\}$$

- per $(x, y) \in D$ fissato, esplicito i vincoli su z:

$$\begin{cases} z \geq \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \\ z \leq \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Integrando per fili, calcolo

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(T) = \iiint_T 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_D \left(\int_{\frac{1}{2a}(x^2+y^2)}^{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} 1 \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Calcolo l'integrale doppio passando alle coordinate polari

$$D \to \tilde{D} = [0, \sqrt{2}a] \times [0, 2\pi]$$

quindi

$$\begin{aligned}\text{vol}(T) &= \iint_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} (\sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{1}{2a}\rho^2)\rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(3a^2 - \rho^2)^{3/2} - \frac{1}{8a}\rho^4 \right]_0^{\sqrt{2}a} \\ &= \ldots = 2\pi a^3 \left(\sqrt{3} - \frac{5}{6} \right)\end{aligned} \tag{2}$$

Procedimento alternativo (I): integrare per strati

- T NON È dominio normale risp. asse z, ma ragionando graficamente si vede che

$$T = T_1 \cup T_2, \quad T_1, T_2 \text{ normali rispetto asse } z$$

$$T_1 : \quad \begin{cases} 0 \le z \le a \\ x^2 + y^2 \le 2az \end{cases}$$

$$T_2 : \quad \begin{cases} a \le z \le \sqrt{3}a \\ x^2 + y^2 \le 3a^2 - z^2 \end{cases}$$

- si ha

$$\iiint_T 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{T_1} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{T_2} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

  e calcolo i due integrali con la riduzione per strati

Esercizio assegnato: ritrovare il risultato (2) seguendo questoprocedimento.

Procedimento alternativo (II): usare i cambiamenti di coordinate. Osservare che

$$T = T_1 \cup T_2,$$

con

- T_1: il volume racchiuso dal paraboloide $2az = x^2 + y^2$ e dai piani $z = 0$ e $z = a$.
- T_2: il volume racchiuso dalla superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ e dal piano $z = a$.

Allora

$$\text{vol}(T) = \text{vol}(T_1) + \text{vol}(T_2)$$

e calcolo $\text{vol}(T_1)$ passando alle coordinate cilindriche, $\text{vol}(T_2)$ passando alle coordinate sferiche.
Esercizio assegnato: ritrovare il risultato (2) seguendo questo procedimento.

Esercizio 8. Usando un'altra formula di riduzione, calcolare

$$I = \iint_D \left(\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{2} \exp(z^2) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \le 4 \right\}.$$

Svolgimento. • La primitiva della funzione $z \mapsto \exp(z^2)$ non è una funzione elementare,

$$\text{impossibile calcolare} \quad \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{2} \exp(z^2)\,\mathrm{d}z$$

• Calcolo I cambiando l'ordine di integrazione.

$$I = \iiint_T \exp(z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

con

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 4, \ \frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq z \leq 2\right\}$$

T è intersezione fra

- il cilindro solido retto infinito, di base $x^2+y^2 \leq 4$,
- e il volume racchiuso dal paraboloide $\frac{1}{2}(x^2+y^2) = z$, con $0 \leq z \leq 2$.

Di fatto

$$T: \quad 0 \leq z \leq 2, \ \frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq z$$

è un dominio normale rispetto all'asse z. Calcolo I integrando per strati

$$\begin{aligned} I = \int_0^2 \left(\iint_{\{x^2+y^2 \leq 2z\}} \exp(z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z &= \int_0^2 \exp(z^2) \cdot \text{area}(\{x^2+y^2 \leq 2z\})\,\mathrm{d}z \\ &= \pi \int_0^2 2z\exp(z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \pi \left[\exp(z^2)\right]_0^2 = \pi(e^4-1). \end{aligned}$$

Esercizio 9. Calcolare

$$I = \iiint_T \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

ove T

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \leq x^2+y^2 \leq 2z - z^2\right\}.$$

Svolgimento. Si noti che

$$x^2+y^2 \leq 2z - z^2 \ \Leftrightarrow \ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$$

Quindi T è l'intersezione di

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq z^2 & \text{complementare di } x^2+y^2 < z^2 \\ x^2+y^2 \leq 2z - z^2 & \text{sfera con } C = (0,0,1) \ r = 1 \end{cases}$$

La presenza di x^2+y^2 nella definizione di T suggerisce le coordinate cilindriche, quindi

$$T \ \to \ \tilde{T}: \begin{cases} \vartheta \in [0, 2\pi], \\ \\ z^2 \leq \rho^2 \leq 2z - z^2 \end{cases}$$

Noto che

$$z^2 \leq 2z - z^2 \ \Leftrightarrow \ z \in [0,1]$$

quindi

$$\tilde{T}: \begin{cases} \vartheta \in [0, 2\pi], \ z \in [0,1] \\ \\ z \leq \rho \leq \sqrt{2z - z^2} \end{cases}$$

è dominio normale“rispetto al piano ϑz”. Quindi

$$\begin{aligned} I = \iiint_{\tilde{T}} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \rho \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}z &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \left(\int_z^{\sqrt{2z-z^2}} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[(\rho^2 + z^2)^{1/2} \right]_z^{\sqrt{2z-z^2}} \, \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{2z} - \sqrt{2}z \right) \, \mathrm{d}z = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 10. Calcolare il volume del solido

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x - 2)^2 + y^2 \leq z \leq 8 - 4x \right\}.$$

Svolgimento. È naturale intepretare T come dominio normale rispetto al piano xy, cioè della forma

$$(x, y) \in D, \quad (x - 2)^2 + y^2 \leq z \leq 8 - 4x.$$

Per determinare D, osservo che segue dall'espressione di T che deve essere

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 8 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 + 4(x-2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + 4(x-2) + 4 + y^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Allora

$$T \ : \ \begin{cases} (x, y) \in D : \ x^2 + y^2 \leq 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 \leq z \leq 8 - 4x \end{cases}$$

e, integrando per fili

$$\mathrm{vol}(T) = \iint_D \left(\int_{(x-2)^2+y^2}^{8-4x} 1 \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2 \right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Passando alle coordinate polari, calcolo

$$\iint_D \left(4 - x^2 - y^2 \right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - \rho^2)\rho \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta = 2\pi \int_0^2 \left(4\rho - \rho^3 \right) \, \mathrm{d}\rho = 2\pi \, (8 - 4) = 8\pi.$$

Esercizio 11. Calcolare

$$I = \iiint_T z e^y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

ove

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 \leq 4, \ x \leq 0, \ z \geq 0, \ x \leq y \leq 0 \right\}.$$

Svolgimento. Si osservi che T è un dominio "normale rispetto al piano xz":

$$T\ :\ \begin{cases} (x,z)\in D:\ x\le 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4 \\ x\le y\le 0. \end{cases}$$

Calcoliamo allora I riducendo per fili nella variabile y:

$$I=\iint_D\left(\int_x^0 ze^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\iint_D z(1-e^x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

Per calcolare quest'ultimo integrale doppio, è possibile procedere in due modi:

1. interpretare D come dominio normale in x:

$$D:\ \begin{cases} -2\le x\le 0 & \text{(conseguenza dei vincoli } x\le 0,\ x^2\le 4\text{)},\\ 0\le z\le\sqrt{4-x^2} & \text{(conseguenza dei vincoli } z\ge 0,\ z^2\le 4-x^2\text{)}. \end{cases}$$

   Quindi **(esercizio: completare i conti!!!)**

$$\iint_D z(1-e^x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_{-2}^0\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z(1-e^x)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x=\ldots=\frac{5}{3}-3e^{-2}.$$

2. passare alle coordinate polari nelle variabili (x,z): in questo modo,

$$D\ \to\ \tilde{D}:\ \begin{cases} 0\le\rho\le 2,\\ \frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\pi. \end{cases}$$

   Quindi **(esercizio: completare i conti!!!)**

$$\begin{aligned}\iint_D z(1-e^x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z&=\iint_{[0,2]\times[\pi/2,\pi]}\rho\sin(\vartheta)(1-\exp(\rho\cos(\vartheta)))\,\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\\ &=\int_0^2\rho\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\rho\sin(\vartheta)(1-\exp(\rho\cos(\vartheta)))\,\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\rho\\ &=\int_0^2\rho\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}(1-\exp(\rho\cos(\vartheta)))\,\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\rho=\ldots=\frac{5}{3}-3e^{-2}.\end{aligned}$$

Esercizio 12. Calcolare

$$I=\iiint_P xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

ove P è il parallelepipedo avente come facce opposte i due quadrati, rispettivamente determinati dai vertici

$$A=(0,0,0),\quad B=(1,0,0),\quad C=(1,1,0),\quad D=(0,1,0)$$

e da

$$E=(1,0,1),\quad F=(2,0,1),\quad G=(2,1,1),\quad H=(1,1,1).$$

Svolgimento. Graficamente si vede che P è il volume compreso fra i piani $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$, e i piani passanti, rispettivamente, per i punti A, D, E, H e B, C, F, G. Si vede che questi due piani hanno, rispettivamente, equazione $x=z$ e $x=z+1$. Quindi

$$P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1,\ z\le x\le z+1\right\}.$$

Quindi P si può vedere come dominio *normale rispetto al piano* yz:

$$P\ :\ \begin{cases}(y,z)\in[0,1]\times[0,1],\\ z\le x\le z+1\end{cases}$$

Integrando per fili in x, si trova

$$\begin{aligned}I=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left(\int_z^{z+1}xy^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint_{[0,1]\times[0,1]}y^2\frac{1}{2}\left((z+1)^2-z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1(2z+1)\,\mathrm{d}z\right)=\ldots=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Esercizio 13. Calcolare

$$I=\iiint_T z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

con

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\le 0,\ z\ge 0\right\}$$

date a, b, $c>0$.

Svolgimento. T è la porzione di *ellissoide solido* compresa nel semispazio $\{z\ge 0\}$. Interpreto T come dominio normale rispetto al piano xy:

- esplicito i vincoli su z:

$$\begin{cases}z\ge 0\\ \frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad 0\le z\le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

- trovo D imponendo che $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\ge 0$:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$$

Uso la formula di riduzione per fili

$$I=\iint_D\left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c^2}{2}\iint_D\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Calcolo l'integrale doppio passando alle coordinate ellittiche

$$\begin{cases}x=a\rho\cos(\vartheta),\\ y=b\rho\sin(\vartheta),\end{cases}\qquad\begin{cases}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \to ab\rho\,\mathrm{d}\rho\\ D\ \to\tilde{D}=[0,1]\times[0,2\pi]\end{cases}$$

quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{c^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1-\rho^2)ab\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \pi abc^2\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi abc^2}{4}
\end{aligned}
$$

Procedimento alternativo: usare le coordinate sferiche generalizzate!!

Esercizio 14 (svolto a lezione). Calcolare il volume del solido

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\leq y\right\}$$

Svolgimento. Nella definizione di T compare $x^2+y^2+z^2$ quindi uso le coordinate sferiche!

$$
\begin{cases}
x=\rho\cos(\vartheta)\sin(\phi)\\
y=\rho\sin(\vartheta)\sin(\phi)\\
z=\rho\cos(\phi)
\end{cases}
$$

Quale è la trasformazione $T\to\tilde{T}$??

- Impongo

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2\leq y \quad &\Leftrightarrow \quad \rho^2\leq\rho\sin(\vartheta)\sin(\phi)\\
&\Leftrightarrow \quad \rho(\rho-\sin(\vartheta)\sin(\phi))\leq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \rho\leq\sin(\vartheta)\sin(\phi)
\end{aligned}
$$

- In particolare

$$
\begin{aligned}
\sin(\vartheta)\sin(\phi)\geq 0 \quad &\overset{\phi\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \quad \sin(\vartheta)\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \vartheta\in[0,\pi]
\end{aligned}
$$

  Quindi

$$
T\ \to\tilde{T}:\ \begin{cases}\vartheta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,\pi],\\ 0\leq\rho\leq\sin(\vartheta)\sin(\phi)\end{cases}
$$

  N.B. $\tilde{T}$ è dominio normale risp. al "piano $\vartheta\phi$".

Quindi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(T)=\int_0^\pi\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{\sin(\vartheta)\sin(\phi)}\rho^2\sin(\phi)\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\vartheta &= \int_0^\pi\left(\int_0^\pi\sin(\phi)\cdot\frac{\sin^3(\phi)\sin^3(\vartheta)}{3}\,\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\vartheta\\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^\pi\sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi\right)\cdot\left(\int_0^\pi\sin^3(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)
\end{aligned}
$$

Calcolo

$$\int_0^\pi \sin^3(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^\pi \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta - \int_0^\pi \sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \ldots = \frac{4}{3}$$

Calcolo

$$\int_0^\pi \sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^\pi \sin^2(\phi)(1-\cos^2(\phi))\,\mathrm{d}\phi$$

♣ Facile conto:

$$\int_0^\pi \sin^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}$$

♠ Calcolo

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\pi \sin^2(\phi)\cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= -\int_0^\pi \sin(\phi)\sin(\phi)\cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin(\phi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\cos^3(\phi)\right)\,\mathrm{d}\phi \\
&\overset{\text{int. parti}}{=} -\frac{1}{3}\int_0^\pi \cos(\phi)\cos^3(\phi)\,\mathrm{d}\phi + \frac{1}{3}\left[\sin(\phi)\cos^3(\phi)\right]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \cos^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi (1-\sin^2(\phi))^2\,\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi (1-2\sin^2(\phi))\,\mathrm{d}\phi - \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

perché

$$\int_0^\pi (1-2\sin^2(\phi))\,\mathrm{d}\phi = 0$$

♢ Allora

$$\int_0^\pi \sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

quindi

$$\frac{4}{3}\int_0^\pi \sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \int_0^\pi \sin^4(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{3}{8}\pi$$

$$\text{INFINE}\quad \mathrm{vol}(T) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 15 (svolto a lezione). Calcolare

$$I = \iiint_T \ln(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

ove il solido T è $B \cap C$, con

$$\begin{aligned}
B &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 1\right\} \quad \text{sfera unitaria} \\
C &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le z^2,\ z\ge 0\right\} \text{ porzione di cono solido nel semispazio } \{z\ge 0\}
\end{aligned}$$

- L'espressione $x^2+y^2+z^2$ compare nella funz. integranda e in B, quindi passo alle coordinate sferiche!

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta)\sin(\phi) \\ y = \rho\sin(\vartheta)\sin(\phi) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$$

- Come $T \to \tilde{T}$??

Osservo che

$$B \to \tilde{B} \ : \quad \begin{cases} \vartheta \in [0,2\pi], \ \phi \in [0,\pi], \\ \\ \rho^2 \le 1 \ \Leftrightarrow \ \rho \in [0,1] \end{cases}$$

Per quel che riguarda la trasformazione $C \to \tilde{C}$, osservo innanzitutto che, poiché considero la porzione di cono solido nel semispazio $z \ge 0$, ho subito

$$\vartheta \in [0,2\pi], \ \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ora esprimo in coordinate sferiche la condizione $x^2+y^2 \le z^2$: si ha

$$\begin{cases} \rho^2\cos^2(\vartheta)\sin^2(\phi) + \rho^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\phi) \le \rho^2\cos^2(\phi) \\ \Updownarrow \\ \rho^2(\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi)) \le 0 \\ \Updownarrow \\ \rho^2(\sin(\phi)+\cos(\phi))(\sin(\phi)-\cos(\phi)) \le 0 \\ \Updownarrow \\ \sin(\phi) \le \cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Quindi

$$T \to \tilde{T} \ : \quad \begin{cases} \vartheta \in [0,2\pi], \\ \\ \phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \\ \rho \in [0,1] \end{cases}$$

- Calcolo

$$I = \iiint_{[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\times[0,2\pi]} \ln(\rho^2)\rho^2\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\phi$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\pi/4}\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi\right)\int_0^1 \rho^2\ln(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$$

♣ Integrando per parti

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \rho^2\ln(\rho)\,\mathrm{d}\rho &= -2\int_0^1 \frac{\rho^3}{3}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho + 2\left[\frac{\rho^3}{3}\ln(\rho)\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho + \frac{2}{3}\ln(1) - 2\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3}{3}\ln(\rho) \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

♢ Quindi

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi/4}\left(-\frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{9}\pi(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$
